Prof. Dr Vojislav Andrić

NEJEDNAKOSTI

U sedmom razredu smo dokazivali nejednakosti oblika $2^{2010} > 10^{602}$, $x^2 + x + 1 > 0$.

U osmom razredu (a i ranije) smo videli smo da se formule koje imaju oblik $L * D$ (gde su L i D algebarski izrazi, a * jedan od simbola >, <, ≥, ≤) nazivaju nejednakosti.

Ako u formuli $L * D$ izrazi L i D ne sadrže promenljivu onda se dobijena nejednakost naziva numerička nejednakost. [1] Takva su na primer nejednakosti: $2^{300} < 3^{200}$ ili $1^3 + 2^3 + \ldots + 99^3 < 2\,500\,000$.

Ukoliko u formuli $L * D$, bar jedan od izraza L i D sadrži jednu ili više promenljivih onda dobijena nejednakost može biti ispunjena za sve vrednosti promenjivih i tada se dobijena formula naziva jednostavno nejednakost. Primeri takvih nejednakosti su: $x^4 + x + 1 > 0$, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ ili $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$.

Medjutim, postoji mogućnost da formula $L * D$, gde bra jedan od izraza L i D sadrže jednu ili više promenjivih, za neke vrednosti promenljivih bude tačna, a za neke vrednosti netačna. Tada govorimo o nejednačinama.

Cilj ove tematske jedinice je da ukaže na neke primere i metode dokazivanja numeričkih nejednakosti i nejednakosti uopšte i proširi i produbi već ranije stečena znanja u ovoj oblasti.

PRIMER 1.

Dokaži nejednakost: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10.$

Rešenje: Za svaki od sabiraka na levoj strani važe nejednakosti $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \ldots > \frac{1}{\sqrt{99}} > \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}.$

Kako je svaki od sabiraka veći ili jednak od $\frac{1}{10}$ to je $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{100}} > 100 \cdot \frac{1}{10} = 10$

PRIMER 2.

Dokaži da je $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2010\cdot 2011} < 1$. Da li se data nejednakost može uopštiti?

Rešenje: Svaki sabirak u datoj nejednakosti ima oblik $\frac{1}{k\cdot(k+1)}$. Kako je $\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, to se dobija $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2010\cdot 2011} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} = 1 - \frac{1}{2011} < 1.$

---

[1] U matematičkoj teoriji takva nejednakost se susreće i pod imenom bezuslovna nejednakost

Uopštavanje nejednakosti podrazumeva razmatranje slučaja za bilo koji prirodan broj n. Uopštenim razmatranjem se dobija $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}<1$.

PRIMER 3.

Ako su a i b realni brojevi, onda je: a) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$; b) $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geq 8a^2b^2c^2$.

Rešenje: Poznato je da je da za svaka dva realna broja a i b važi nejednakost $(a-b)^2 \geq 0$. To znači da je $a^2-2ab+b^2 \geq 0$, pa je $a^2+b^2 \geq 2ab$. Jednakost važi ako je $a-b=0$, tj. ako je $a=b$.

a) Koristeći prethodnu nejednakost dobija se $a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2 \geq 2ab+2bc+2ca$. Ako se dobijena nejednakost podeli sa 2, onda je $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, štoje trebalo dokazati. U dobijenoj formuli jednakost važi ako je $a=b$ i $b=c$, pa prema tome ako je $a=b=c$.

b) Slično, $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geq 2ab\cdot 2bc\cdot 2ca = 8a^2b^2c^2$. I u ovoj nejednakosti jednakost važi ako je $a=b$ i $b=c$, pa prema tome ako je $a=b=c$.

U prethodnim primerima tražene nejednakosti su dokazivane tako što se polazilo od poznatih nejednakosti (najčešće $x^2 \geq 0$) i potom nizom ekvivalentnih algebarskih transformacija dobila nejednakost koju je trebalo dokazati. Primer koji sledi podrazumeva suprotan postupak, a to znači da se polazi od nejednakosti koju treba dokazati, a onda sistemom ekvivalentnih transformacija dobija neka od već dobro poznatih nejednakosti.

PRIMER 4.

Ako je x realan broj onda je $3(1+x^2+x^4) \geq (1+x+x^2)^2$. Dokaži.

Rešenje: Ako se transformiše nejednakost $3(1+x^2+x^4) \geq (1+x+x^2)^2$ dobija se njoj ekvivalentna nejednakost $3+3x^2+3x^4 \geq 1+x^2+x^4+2x+2x^2+2x^3$. Sledi da je $2+2x^4-2x-2x^3 \geq 0$. Rastavljanjem leve strane na činioce dobija se $2((1-x)+x^3(x-1)) \geq 0$ ili $2(x-1)(x^3-1) \geq 0$. Poslednja nejednakost je tačna, jer su izrazi $x-1$ i x^3-1 uvek istoga znaka.

U mlađim razredima bilo je reči o aritmetičkoj sredini dva realna broja . Tako je za realne brojeve a i b aritmetička sredina definsana jednakošću $A = \frac{a+b}{2}$. Pored aritmetičke sredine može se posmatrati I geometrijska, harmonijska i kvadratna sredina: $G = \sqrt{ab}$, $H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ I $K = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Važno je napomenuti da se navedene sredine posmatraju za pozitivne realne brojeve, jer u suprotnom geometrijska sredina ne bi bila definisana.

PRIMER 5.

Dokaži da za pozitivne realne brojeve važi nejednakost $K \geq A \geq G \geq H$.

Rešenje: Tražena nejednakosti se najefikasnije dokazuje svođenjem na već poznate nejednakosti. Iz A $\geq$ G, tj. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ sledi da je $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, tj $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, što je očigledno tačno.

Ako je K $\geq$ A, tj. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$, onda se posle kvadriranja dobija $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$.

Daljom transformacijom se dobija $2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$, odnosno $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, što je takođe tačno.

Iz G $\geq$ H, tj $\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ sledi da je $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ ili $\frac{a+b}{2} \geq \frac{ab}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$. Dobijena nejednakost je već dokazana nejednakost A $\geq$ G.

ZADACI

1. Šta je veće: $\sqrt{2010} + \sqrt{2012}$ ili $2\sqrt{2011}$?
2. Dokazati nejednakost: $\frac{2^{2010}+1}{2^{2011}+1} > \frac{2^{2011}+1}{2^{2012}+1}$. Može li se data nejednakost uopštiti?
3. Šta je veće: $n!$ ili 2^n ?
4. Dokaži nejednakost: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1.$
5. Da li važi nejednakost: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} ... \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$?
6. Ako je $x > 0$, onda je $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Dokaži.
7. Ako je $0 < x \leq a \leq 1$, onda je $x + \frac{1}{x} \geq a + \frac{1}{a}$. Dokaži.
8. Ako je x realan broj, onda je $\frac{x^2}{x^4+1} \leq \frac{1}{2}$. Dokaži..
9. Ako je $x^2 + y^2 \leq 2$, onda je $|x+y| \leq 2$. Dokaži.
10. Dokazati da je $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$ za svako realno x .
11. Ako je $x + \frac{2}{x} = 3$, onda je $x^{2011} + \frac{2}{x^{2011}} \geq 3$. Dokazati.
12. Neka su a, b, c i d pozitivni realni brojevi. Dokazati nejednakosti:

    a) $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$; b) $a^4 + b^4 + 2 \geq 4ab$; c) $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$;

    d) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.

13. Ako su x, y i z pozitivni realni brojevi i ako je $xyz = 1$, onda je $(x + 1)(y + 1)(z + 1) \geq 8$. Dokaži.

14. Neka su $a_1,\ a_2, ...,\ a_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$. Dokaži nejednakost: $(1 + a_1)(1 + a_2) ... (1 + a_n) \geq 2^n$

15. Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitivni realni brojevi. Dokazati da tada važi sledeća nejednakost: $(a_1 + a_2 + ... + a_n)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}) \geq n^2$.

16. Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitivni realni brojevi. Dokazati da tada važi sledeća nejednakost:

$$\frac{a_1^2 + a_1 + 1}{a_1} \cdot \frac{a_2^2 + a_2 + 1}{a_2} \cdot ... \cdot \frac{a_n^2 + a_n + 1}{a_n} \geq 3^n$$

17. Neka a su a i b katete, c hipotenuza, h hipotenuzina visina, r poluprečnik upisanog, a R poluprečnik opisanog kruga i P površina pravouglog trougla. Dokazati nejednakosti:

a) $a^3 + b^3 < c^3$; b) $a + b < c + h$; c) $c \geq 2\sqrt{P}$; d) $r + R \geq \sqrt{2P}$; e) $c < a+b \leq c\sqrt{2}$.

18. Ako su a, b i c merni brojevi kateta pravouglog trougla, odnosno hipotenuze pravouglog trougla, onda za svaki prirodan broj n ($n > 2$) važi nejednakost $a^n + b^n < c^n$. Dokaži.

19. Ako su a, b , c , d pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c + d = 1$, dokazati da važi nejednakost: $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 6$.

REŠENJA

1. Neka je $A = \sqrt{2010} + \sqrt{2012}$ i $B = 2\sqrt{2011}$. Kako su A i B pozitivni, to se kvadriranjem izraza A i B dobija $A^2 = 2010 + 2\sqrt{2010 \cdot 2012} + 2012 = 4022 + 2\sqrt{2010 \cdot 2012}$ i $B^2 = 4 \cdot 2011 = 4012 + 2 \cdot 2011$. Tada je $A^2 - B^2 = 2 \cdot \sqrt{2010 \cdot 2012} - 2 \cdot 2011 = 2\sqrt{(2011 - 1)(2011 + 1)} - 2 \cdot 2011 = 2 \cdot \left(\sqrt{2011^2 - 1} + 2011\right) < 0$. Dakle $A^2 < B^2$, pa je i $A < B$.

2. Ako je $x = 2^{2010}$ data nejednakost postaje $\frac{x + 1}{2x + 1} > \frac{2x + 1}{4x + 1}$. Ako je $2x + 1 > 0$ i $4x + 1 > 0$ (što znači da je $x > -\frac{1}{4}$), onda je dobijena nejednakost je ekvivalentna sa $(x + 1)(4x + 1) > (2x + 1)^2$, tj. $4x^2 + 5x + 1 > 4x^2 + 4x + 1$ ili $x > 0$. Dakle, za svako $x > 0$ važi nejednakost $\frac{x + 1}{2x + 1} > \frac{2x + 1}{4x + 1}$.
Kako je $x = 2^{2010} > 0$, to iz dokazane opšte nejednakosti važi i data nejednakost.

3. Ako je n = 1, onda je $n! = 1 < 2^n = 2$.
Ako je n = 2, onda je $n! = 2 < 2^n = 4$.
Ako je n = 3, onda je $n! = 6 < 2^n = 8$.
Neka je za $n > 3$, $A = \frac{n!}{2^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n}{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot ... \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{2} \cdot ... \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n}{2}$. Kako je u dobijenom izrazu svakui činilac veći od 1, to je i $A > 1$. To znači da je za $n > 3$, $n! > 2^n$.

4. Iskoristiti primer 2 i činjenicu da za svaki prirodan broj n > 1 važi nejednakost $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$.

5. Ako je $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}$, onda je A > 0 i $\frac{1}{A} = \frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{100}{99} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{98}{99}\cdot 100$.

Kako je $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$, $\frac{6}{7} > \frac{5}{6}$, ... , $\frac{98}{99} > \frac{97}{98}$ to je $\frac{1}{A} > \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{97}{98}\cdot 100$. Sledi da je $\frac{1}{A} > \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{97}{98}\cdot\frac{99}{100}\,\frac{100}{99}\,100 = \frac{100\cdot 100A}{99} > \frac{100\cdot 100A}{100} = 100A$ ili $1 > 100A^2$. Jasno je da je tada $A^2 < \frac{1}{100}$ i $A < \frac{1}{10}$.

6. Neka je $x > 0$. Kako je $(x-1)^2 \geq 0$, to je i $x^2 - 2x + 1 \geq 0$, pa je $x^2 + 1 \geq 2x$. Pošto je x > 0, onda se deljenjem nejednakosti sa x dobija $\frac{x^2+1}{x} \geq 2$, odnosno tražena nejednakost $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

7. Ako je $x + \frac{1}{x} \geq a + \frac{1}{a}$, onda zbog činjenice da je $0 < x \leq a \leq 1$ (a samim tim i $ax > 0$) sledi da je $ax^2 + a \geq a^2x + x$. Dalje je $ax^2 + a - a^2x - x = ax(x-a) - (x-a) = (x-a)(ax-1) \geq 0$, što je tačno, jer je $x - a \leq 0$ i $ax - 1 \leq 0$, pa je njihov proizvod uvek nenegativan.

8. Tražena nejednakost se dobija iz nejednakosti $(x^2-1)^2 \geq 0$.

9. Kako je $2xy \leq x^2 + y^2 \leq 2$, to je $x^2 + 2xy + y^2 \leq 4$, odnosno $(x+y)^2 \leq 4$. Sledi da je $|x+y| \leq 2$.

10. * Ako je $x \leq 0$, onda je svaki od sabiraka nenegativan pa je nejednakost ispunjena.
* Ako je $0 < x < 1$, onda je $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = x^8 + x^2(1-x^3) + (1-x)$. Kako su tada izrazi $1-x^3$ i $1-x$ pozitivni, to je i $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$.
* Ako je $x \geq 1$, onda je $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = x^5(x^3-1) + x(x-1) + 1$. Kako su tada izrazi $x^3 - 1$ i $x - 1$ nenegativni, to je $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$. .

11. Ako je $x + \frac{2}{x} = 3$, onda je $x \neq 0$, pa je $x^2 + 2 = 3x$. Sledi da je $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$, pa je x = 1 ili x = 2.. Tada je $x^{2011} + \frac{2}{x^{2011}} = 1 + 2 = 3$ ili $x^{2011} + \frac{2}{x^{2011}} = 2^{2011} + \frac{2}{2^{2011}} > 3$.

12. Sve nejednakosti se dokazuju korišćenjem nejednakosti A ≥ G, tj. $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

a) Nejednakost se dobija, ako se zameni $x = \frac{a+b}{2}$ i $y = \frac{c+d}{2}$

b) U prethodnoj nejednakosti staviti c = 1 i d = 1.

c) U nejednakosti $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ zameniti $d = \frac{a+b+c}{3}$.

d) Nejednakost je direktna posledica prethodne nejednakosti pod c.

Napomena: Nejednakosti a) i c) predstavljaju nejednakost između aritmetiče i geometrijske sredine za tri odnosno četiri broja.

13. Ako su x, y i z pozitivni realni brojevi, onda je $\frac{x+1}{2} \geq \sqrt{x}$, $\frac{y+1}{2} \geq \sqrt{y}$, $\frac{z+1}{2} \geq \sqrt{z}$, pa se množenjem prethodnih nejednakosti dobija $(x + 1)(y + 1)(z + 1) \geq 8\sqrt{xyz} = 8$.

14. Nejednakost se dokazuje na isti način kao u prethodnom zadatku.

15. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za n brojeva sledi da je $a_1+a_2+...+a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2 \ ... \ a_n}$ i $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n} \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1a_2....a_n}}$. Množenjem ovih dveju nejednakosti dobija se $(a_1+a_2+...+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}) \geq n^2 \cdot \sqrt[n]{\frac{a_1a_2...a_n}{a_1a_2...a_n}} = n^2$.

16. Iskoristiti nejednakost $x^2 + x + 1 \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot x \cdot 1} = 3x$, tj. $\frac{x^2 + x + 1}{x} \geq 3$.

17. a) Kako je $a < c$ i $b < c$, to je $a^3 + b^3 = a \cdot a^2 + b \cdot b^2 < c \cdot a^2 + c \cdot b^2 = c(a^2 + b^2) = c \cdot c^2 = c^3$.
b) Iz $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab = c^2 + 4P = c^2 + 2ch < c^2 + 2ch + h^2 = (c + h)^2$. Kako su $a + b$ i $c + h$ pozitivni brojevi to iz dobijene nejednakosti sledi da je $a + b < c + h$.
c) Kako je $c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab = 4P$, to je $c \geq 2\sqrt{P}$.
d) $r + R = \frac{a+b-c}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = \sqrt{2P}$.
e) Prvi deo nejednakosti je nejednakost trougla, a drugi sleduje iz relacije $a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = 2c^2$.

18. Kako je $a < c$ i $b < c$ i $n > 2$, to je $a^n + b^n = a^{n-2} \cdot a^2 + b^{n-2} \cdot b^2 < c^{n-2} \cdot a^2 + c^{n-2} \cdot b^2 = c^{n-2}(a^2 + b^2) = c^{n-2} \cdot c^2 = c^n$.

19. Iz nejednakosti $\left(\sqrt{4x+1} - 1\right)^2 \geq 0$ sledi da je $4x + 1 - 2\sqrt{4x+1} + 1 \geq 0$ i $4x + 2 \geq 2\sqrt{4x+1}$ i konačno $\sqrt{4x+1} \leq 2x + 1$, pri čemu jednakost važi samo za x = 0. Primenom prethodne nejednakosti dobija se $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 2a+1+2b+1+2c+1+2d+1 = 2(a + b + c + d) + 4 = 6$.
Napomena: Korišćena je stroga nejednakost, jer je uslov zadatka da su a, b, c, d pozitivni brojevi.