Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

21.04.2007.

8. РАЗРЕД

1. Доказати да је број $2007^{2005} - 2007$ дељив са 90.

2. Бочна страна правилне тростране пирамиде је једнакокраки троугао са углом од 30° при врху. Дужина бочне ивице је 8 cm. Израчунати површину те пирамиде.

3. Израчунати разлику израза $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2005^2$ и $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + 2004 \cdot 2006$.

4. Хипотенузе BC и AD правоуглих троуглова ABC и ABD секу се у тачки E. Ако је дужина дужи AC једнака 6 cm, а дужина дужи BD једнака 3 cm, израчунати растојање тачке E од дужи AB.

5. Петоцифрен број је "петоразлик" ако су му све цифре различите и припадају скупу $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Израчунати збир свих таквих бројева.

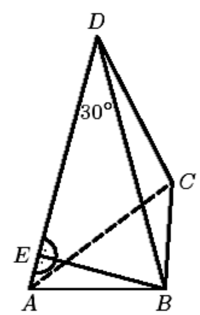
Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.
Забрањена је употреба калкулатора и мобилних телефона.

8. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

1. Како је $2007^{2005}-2007 = 2007\cdot(2007^{2004}-1) = 9\cdot 223\cdot(2007^{2004}-1)$, то је дати број дељив са 9. (8 бодова) Број 2007^4 се завршава цифром 1, па следи да се и број 2007^{2004} завршава цифром 1. Због тога је $2007^{2004}-1$ дељив са 10, па је и $2007^{2005}-2007$ дељив са 10. (12 бодова) Како је дати број дељив и са 9 и са 10, он је дељив са 90.

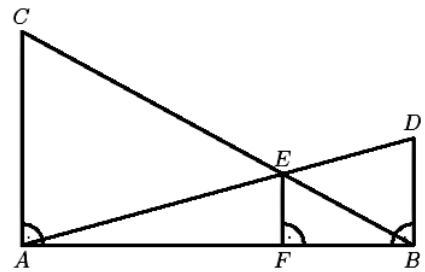
2. Обележимо темена основе пирамиде са A, B и C, а врх са D. Нека је тачка E подножје висине из темена B бочне стране ABD. У правоуглом троуглу EBD угао EDB једнак је $30°$, па је дужина катете BE једнака половини дужине хипотенузе BD и износи $4\ cm$. (4 бода) Површина бочне стране пирамиде је $16\ cm^2$. (4 бода) Примењујући Питагорину теорему на троугао EBD добијамо да је дужина дужи ED једнака $4\sqrt{3}\ cm$. Онда је дужина дужи AE једнака $8-4\sqrt{3}\ cm$. Примењујући Питагорину теорему на троугао ABE добијамо да је дужина основне ивице AB дате пирамиде једнака $8\sqrt{2-\sqrt{3}}\ cm$. (4 бода) Основа пирамиде је једнакостранични троугао, па је површина те основе једнака $\frac{(8\sqrt{2-\sqrt{3}})^2\sqrt{3}}{4}\ cm^2$, тј. $32\sqrt{3}-48\ cm^2$. (4 бода) Површина пирамиде је $32\sqrt{3}-48\ cm^2+3\cdot 16\ cm^2$, односно $32\sqrt{3}\ cm^2$. (4 бода)



3. (МЛ 6, год. 2005/6, стр. 32, зад. 30) Како је $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+2004\cdot 2006=(2-1)\cdot(2+1)+(3-1)\cdot(3+1)+(4-1)\cdot(4+1)+\cdots+(2005-1)\cdot(2005+1)=2^2-1+3^2-1+4^2-1+\cdots+2005^2-1=1^2+2^2+3^2+\cdots+2005^2-2005$ (15 бодова), то је тражена разлика једнака 2005 (5 бодова).

4. Нека је тачка F подножје нормале из тачке E на дуж AB. Троуглови AFE и ABD су правоугли и имају заједнички угао FAE, па су слични. Следи да је $FE : BD = AF : AB$. (5 бодова) Троуглови FBE и ABC су правоугли и имају заједнички угао FBE, па су и

они слични. Следи да је $FE : AC = FB : AB$. (5 бодова) Из ових једнакости добијамо да је $\frac{FE}{BD} + \frac{FE}{AC} = \frac{AF+FB}{AB}$, односно $FE \cdot (\frac{1}{BD} + \frac{1}{AC}) = 1$. Према томе, дужина дужи FE, а самим тим и тражено растојање је 2 cm. (10 бодова)



5. Цифру десетица хиљада петоцифреног броја са датим својством можемо изабрати на 5 начина, цифру јединица хиљада на 4 начина, цифру стотина на 3 начина, цифру десетица на 2 начина и цифру јединица на 1 начин, одакле следи да таквих петоцифрених бројева има 120. (3 бода) Како су код сваког од њих све цифре различите, то се у запису свих 120 бројева свака од цифара 1, 2, 3, 4 и 5 појављује по 120 пута, и то по 24 пута на сваком месту у запису петоцифреног броја. (5 бодова) Следи да је збир свих петоцифрених бројева са датим својством једнак $(1+2+3+4+5) \cdot 24 \cdot (10000 + 1000 + 100 + 10 + 1)$, тј. 3999960. (12 бодова)