

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

07.03.2020.

VIII разред

1. Мањи дијагонални пресек правилне шестостране пирамиде је једнакостранични троугао обима $18\sqrt{3}$ cm. Израчунај запремину те пирамиде.
2. За годину кажемо да је *срећна* ако су све цифре које се користе за записивање броја различите узастопне цифре. На пример, последња *срећна* година је била 2013.
 - а) Која је прва следећа *срећна* година?
 - б) Колико има *срећних* година у трећем миленијуму?
3. Израчунај запремину правилне осмоугране призме чији је највећи дијагонални пресек квадрат странице 12 cm.
4. Одреди све вредности целог броја m за које је број $\frac{m^2 + 2016}{|m| + 2}$ такође цео.
5. Одреди све просте бројеве p и q за које је број $p^2 + q^2 + 1$ потпун квадрат.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Означимо са a основну ивицу пирамиде. Тада је краћа дијагонала правилног шестоугла $a\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3}$, одакле је $a = 6$ см [5 поена].

Висина пирамиде је $H = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ см [10 поена], а запремина $V = 108\sqrt{6}$ см³ [5 поена].

2. а) 2031 [5 поена]; б) У запису срећне године трећег миленијума могући су следећи избори цифара: 0, 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4 или 2, 3, 4, 5 [4 поена]. При томе је цифра 2 увек на првом месту [3 поена]. За сваки избор постоји 6 могућности за редослед друге, треће и четврте цифре [4 поена]. Дакле, тражени број је $3 \cdot 6 = 18$ [4 поена].

3. Висина призме и најдужа дијагонала основе су 12 см [2 поена]. Правилни осмоугао се састоји од четири подударна делтоида чије су дијаголане 6 см и $6\sqrt{2}$ см [10 поена], па је површина основе $V = 72\sqrt{2}$ см² [6 поена], а запремина призме је $V = 864\sqrt{2}$ см³ [2 поена].

4. $\frac{m^2 + 2016}{|m| + 2} = \frac{m^2 - 4 + 2020}{|m| + 2} = |m| - 2 + \frac{2020}{|m| + 2}$ [5 поена]. Полазни број

је цео ако $(|m| + 2) | 2020$. Како је $2020 = 1 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, његови делиоци су 1, 2, 4, 5, 10, 20, 101, 202, 404, 505, 1010 и 2020 (има их 12) [4 поена]. $|m| + 2$ не може бити једнако 1. Ако је $|m| + 2 = 2$ мора бити $m = 0$, а у свим осталим случајевима постоје по две могућности за m . Дакле, оваквих бројева m има 21 и они су: 0, 2, -2, 3, -3, 8, -8, 18, -18, 99, -99, 200, -200, 402, -402, 503, -503, 1008, -1008, 2018, -2018 [свака 2 тачно записана решења по 1 поен. Ако је ученик записао сва решења 11 поена].

5. (МЛ 54/1) Нека је најпре $p = 2$. Тада треба да важи $5 + q^2 = n^2$, тј. $n^2 - q^2 = (n - q)(n + q) = 5$, одакле је $n + q = 5$ и $n - q = 1$, тј. $q = 2$ ($n = 3$) [5 поена]. Претпоставимо сада да важи $p > 2$ и $q > 2$. За квадрат непарног броја важи $(2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1$, па је остатак при дељењу са 4 непарног броја једнак 1 [5 поена]. У релацији $p^2 + q^2 + 1 = n^2$ сви бројеви $p, q, 1$ и n су непарни [5 поена], па је остатак при дељењу са 4 леве стране једнакости 3, а десне 1, што је немогуће [5 поена]. Дакле, једино решење задатка је $p = q = 2$.