Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
28.02.2015 - VIII РАЗРЕД

1. Порција воћне салате садржи $\frac{3}{4}$ воћа, а остатак је шлаг. Ако би јој се додало још 40 грама шлага, у порцији би било два пута више воћа него шлага.
а) Колико грама воћне салате има у једној порцији?
б) Колико грама воћа садржи 5 порција ове воћне салате?

2. Двојица шахиста одиграли су меч од неколико партија у коме су се за победу добијала 4 поена, за реми 2 поена и за пораз 1 поен. При томе су обојица укупно скупили 170 поена. Да ли је победник могао имати тачно 90 поена?

3. Правилна шестострана призма пресечена је са равни. Раван садржи две паралелне основне ивице које су на различитим основама и не припадају истој бочној страни. Површина добијеног пресека је $6\sqrt{7}\ cm^2$. Израчунај запремину призме ако је висина призме два пута дужа од основне ивице.

4. Дата је табела 100×100 у коју су, редом, уписани сви бројеви од 1 до 10000 (у прву врсту редом бројеви од 1 до 100, у другу од 101 до 200, ...). Докажи да је за сваки квадрат 7×7, који можемо уочити у табели, збир свих бројева у њему дељив са 49.

5. Правилан 2014-угао и правилан 2015-угао имају једнаке дужине страница. Посматрају се кружни прстен одређен уписаном и описаном кружницом 2014-угла и кружни прстен одређен уписаном и описаном кружницом 2015-угла. Који од та два кружна прстена има већу површину?

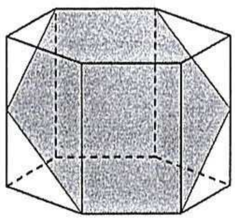
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 47/5**) а) Ако са x означимо масу порције, тада је $\frac{3}{4}x = 2\cdot\left(\frac{1}{4}x + 40\text{g}\right)$ (**7 поена**), одакле је $x = 320\text{g}$ (**7 поена**). б) 1200g (**6 поена**).

2. Ако победник има 90 поена, онда поражени има 80 поена, тј. разлика у поенима је 10. Како се за реми добија једнак број поена, разлика међу играчима се не мења, док се у случају победе једног играча разлика међу њима мења за 3 сваки пут, па и укупна разлика мора бити дељива са 3. Како $3 \nmid 10$, то победник није могао имати тачно 90 поена (**20 поена**).



3. Нека је основна ивица дужине a. Дати пресек је шестоугао састављен од два подударна једнакокрака трапеза. Основице једног трапеза су дужина $2a$, a, а краци $a\sqrt{2}$ (**6 поена**). Површина једног трапеза је $\frac{3}{4}a^2\sqrt{7}$ (**6 поена**), а површина пресека $\frac{3}{2}a^2\sqrt{7}$. Основна ивица призме је онда 2cm (**4 поена**), а висина 4cm. Запремина призме је $24\sqrt{3}\text{cm}^3$ (**4 поена**).

4. Уочимо произвољну табелу 7×7 и нека је x број у њеном центру. Тада је збир бројева у његовој врсти $(x-3) + \ldots + x + \ldots + (x+3) = 7x$ (**5 поена**). Како су сви бројеви у наредној врсти за по 100 већи, то је њихов збир $7x + 700$. На исти начин добијамо да су збирови у датих 7 врста: $7x - 2100$, $7x - 1400$, $7x - 700$, $7x$, $7x + 700$, $7x + 1400$, $7x + 2100$ (**5 поена**), па је укупан збир $7 \cdot 7x = 49x$ и дељив је са 49 (**10 поена**).

5. (**МЛ 49/1**) Нека је a дужина странице правилног 2014-угла и правилног 2015-угла. И у једном и у другом случају страница многоугла је тетива описане кружнице која додирује уписану кружницу. Ако су r_{2014}, r_{2015}, R_{2014} и R_{2015} полупречници уписане и описане кружнице 2014-угла и 2015-угла, редом, тада је $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = R_{2014}^2 - r_{2014}^2 = R_{2015}^2 - r_{2015}^2$ (**15 поена**), па је површина кружног прстена $R_{2014}^2\pi - r_{2014}^2\pi = \pi(R_{2014}^2 - r_{2014}^2) = \frac{a^2}{4}\pi = \pi(R_{2015}^2 - r_{2015}^2) = R_{2015}^2\pi - r_{2015}^2\pi$. Дакле, оба прстена имају једнаке површине (**5 поена**).