Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

21.04.2007.

6. РАЗРЕД

1. Одредити све парове природних бројева a и b таквих да је $a+b=30$ и $\frac{2005}{2007}=\frac{198}{223}+\frac{a}{b}$.
2. Нека је $ABCD$ паралелограм код кога је $AB > BC$. Права p која садржи пресек дијагонала O и нормална је на дијагоналу BD сече страницу AB у тачки M и страницу CD у тачки N. Доказати да је четвороугао $MBND$ ромб.
3. Ако су a и b прости бројеви већи од 3 и $a > b$, доказати да је производ $(a+b)\cdot(a-b)$ дељив са 12.
4. У оштроуглом троуглу ABC тачке D и E су средишта страница AC и BC. Ако се симетрале углова ADE и BED секу на страници AB, доказати да је $AB=\frac{AC+BC}{2}$.
5. Одредити колико има једнакокраких троуглова чије странице имају целобројне дужине (у cm), а обим им је једнак 2005 cm.

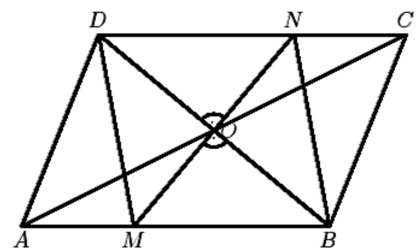
Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.
Забрањена је употреба калкулатора и мобилних телефона.

6. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

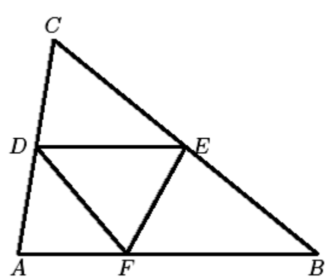
1. Из друге једнакости добијамо да је $\frac{a}{b} = \frac{1}{9}$. (10 бодова) Користећи прву једнакост добијамо да је $a = 3$, $b = 27$. (10 бодова)

2. Углови OBM и ODN су углови са паралелним крацима, па су једнаки. Тачка O је средиште дијагонале BD, па је $OB = OD$. Како је још $\measuredangle BOM = \measuredangle DON = 90°$, то је по другом ставу подударности троуглова (УСУ) $\triangle MBO \cong \triangle NDO$. Следи да је $MB = ND$. (5 бодова) Ове дужи су и паралелне, па следи да је четвороугао $MBND$ паралелограм. (5 бодова) Његове дијагонале су међусобно нормалне, па је он ромб. (10 бодова)



3. Прости бројеви већи од 3 су непарни, па су a и b непарни бројеви. Њихов збир $a + b$ и њихова разлика $a - b$ су парни бројеви, па је производ $(a + b) \cdot (a - b)$ дељив са 4. (10 бодова) При дељењу са 3 бројеви a и b могу имати остатак 1 или 2. Ако имају исти остатак, онда је разлика $a - b$ дељива са 3, а ако имају различит остатак, онда је збир $a + b$ дељив са 3. У сваком случају производ $(a + b) \cdot (a - b)$ је дељив са 3. (10 бодова) Како је дељив и са 3 и са 4, дељив је са 12.

4. Нека је F тачка пресека симетрала углова ADE и BED. Како је DE средња линија троугла ABC, то је она паралелна са страницом AB. Одатле следи да је $\measuredangle FDE = \measuredangle AFD$, па је $\measuredangle AFD = \measuredangle ADF$. (6 бодова) Троугао AFD је једнакокрак, па је $AF = AD$. (4 бода) Тачка D је средиште странице AC, па је $AF = \frac{AC}{2}$. (4 бода) Аналогно добијамо да је $BF = \frac{BC}{2}$. Следи да је $AB = \frac{AC+BC}{2}$. (6 бодова)



5. (МЛ 2, год. 2005/6, стр. 29, зад. 1988) Нека је a дужина основице, а b дужина крака (све у cm) троугла који испуњава услове задатка. Како је $a + 2b$ непаран број, то је a непаран број. Збир дужина две странице у троуглу је већи од дужине треће странице, па мора

бити $a < 2b$. Како је $a + 2b = 2005$, то је $a < 1003$, па a може бити било који елемент скупа $\{1, 3, \ldots, 1001\}$. (15 бодова) Према томе, број троуглова који испуњавају услове задатка је 501. (5 бодова)