

Министарство просвете и спорта Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

15.03.2008.

VIII РАЗРЕД

1. Колико има целих бројева x за које важи $\frac{1}{4} < \frac{2-x}{7} < \frac{11}{12}$?
2. Однос површина страна датог квадрата је $2 : 3 : 5$. Израчунај однос дужина ивица тог квадрата.
3. Одреди x ако је $x^2 + \sqrt{3} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$.
4. Краци трапеца припадају правама које су међусобно нормалне. Докажи да је збир квадрата дужина дијагонала тога трапеца једнак збиру квадрата дужина основица.
5. Дат је скуп $S = \{8, 5, 1, 13, 3, 21, 2\}$. Милена за сваки двочлани подскуп скупа S на табли записује већи број. Одреди збир бројева које је Милена написала на табли.

Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.

Израда задатака траје 120 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА – VIII РАЗРЕД

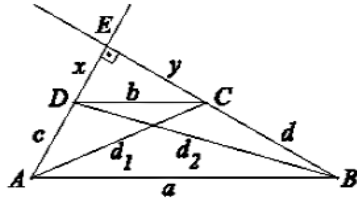
1. $\frac{1}{4} < \frac{2-x}{7} < \frac{11}{12}$; $\frac{21}{84} < \frac{12(2-x)}{84} < \frac{77}{84}$ (5 бодова)

$21 < 12(2-x) < 77$ (5 бодова). Како $x \in \mathbb{Z}$, то и $2-x \in \mathbb{Z}$, па је $2-x \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, тј. $x \in \{0, -1, -2, -3, -4\}$. Дакле, 5 целих бројева задовољава услове задатка (10 бодова).

2. Нека је $ab : bc : ca = 2 : 3 : 5$, тј. $\frac{ab}{2} = \frac{bc}{3} = \frac{ca}{5}$ (5 бодова). Сада је $\frac{a}{2} = \frac{c}{3}$ и $\frac{b}{3} = \frac{a}{5}$ (5 бодова), односно $\frac{a}{10} = \frac{c}{15}$ и $\frac{a}{10} = \frac{b}{6}$ (5 бодова). Коначно $\frac{a}{10} = \frac{b}{6} = \frac{c}{15}$, односно $a : b : c = 10 : 6 : 15$.

3. Полазна једначина се може записати у облику $x^2 + \sqrt{3} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2}$ (10 бодова), тј. $x^2 + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$, одакле је $x^2 = 1$ (5 бодова), тј. $x = 1$ или $x = -1$ (5 бодова).

4.



Нека су дате ознаке као на слици. Тада је

$$a^2 = (c+x)^2 + (d+y)^2 \text{ и } b^2 = x^2 + y^2, \text{ тј.}$$

$$a^2 + b^2 = (c+x)^2 + (d+y)^2 + x^2 + y^2 \text{ (10 бодова).}$$

Слично је и

$$d_1^2 = (c+x)^2 + y^2 \text{ и } d_2^2 = x^2 + (d+y)^2, \text{ тј.}$$

$$d_1^2 + d_2^2 = (c+x)^2 + (d+y)^2 + x^2 + y^2 \text{ (10 бодова),}$$

одакле долазимо до тврђења задатка.

5. Милена ће за подскупе $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, ... редом записивати на табли 2, 3, 5, ... (5 бодова). Како је $S = \{8, 5, 1, 13, 3, 21, 2\}$ сваки број ће се налазити на табли онолико пута колико има елемената пре њега (ако их посматрамо у растућем поретку), тј:

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 13 \cdot 5 + 21 \cdot 6 = 246 \text{ (15 бодова).}$$