Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

05.04.2009.

VI РАЗРЕД

1. Одреди све парове целих бројева x и y за које важи:

$$x^2 \cdot |y| = 2009.$$

2. Конструиши троугао ABC ако је позната страница BC (a), висина која одговара страници BC (h_a) и полупречник описане кружнице око троугла ABC (r_o).

3. На једном острву $\frac{3}{4}$ мушкараца су ожењени, а $\frac{2}{3}$ жена су удате. Који део становништва острва није у браку, ако је број ожењених мушкараца једнак броју удатих жена?

4. На страницама AB и BC ромба $ABCD$ изабране су тачке E и F тако да је $AE = BF$. Угао BAD тог ромба је 60°. Докажи да је троугао DEF једнакостраничан.

5. Дато је 5 природних бројева a, b, c, d и e, чији је збир 2009. Збир нека 3 од њих је 1000. Докажи да је $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ дељиво са 4.

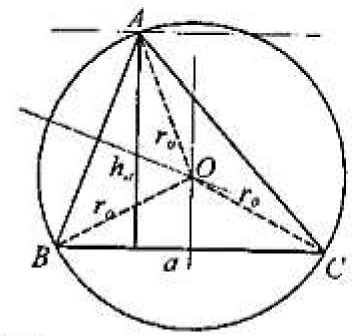
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА – VI РАЗРЕД

1. Растављања броја 2009 су $2009 = 49 \cdot 41 = 7 \cdot 287 = 1 \cdot 2009$. Како ни један од бројева 7 и 287 није квадрат неког целог броја, добијамо да је $x^2 = 49$ и $|y| = 41$ или $x^2 = 1$ и $|y| = 2009$ **(4 бода)**. Дакле, сва решења су **(свако решење по 2 бода)**:

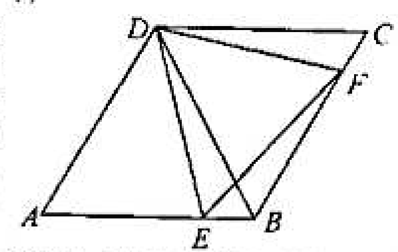
$(x,y) \in \{(7,41),(7,-41),(-7,41),(-7,-41),(1,2009),(1,-2009),(-1,2009),(-1,-2009)\}$.

2. Нека је O центар описане кружнице. Троугао BCO је једнакокраки и познате су нам све његове странице па га можемо конструисати. Тачка A се налази на правој која је паралелна правој на којој је страница a и на растојању h_a од ње и налази се на удаљености r_o од тачке O. Теме A је одређено пресеком поменуте праве и кружнице **(За објашњење и конструкцију дати по 10 бодова. Не тражити доказ и дискусију)**.



3. **(МЛ, XLI-5)** Ако је x мушкараца у браку, онда је и x жена у браку, на острву живи $\frac{4x}{3}$ мушкараца и $\frac{3x}{2}$ жена **(5 бодова)**. Острво има укупно $\frac{17x}{6}$ становника **(5 бодова)**. У браку је $2x$ становника, а $\frac{5x}{6}$ становника није **(5 бодова)**, а то је $\frac{5}{17}$ становника **(5 бодова)**.

4. Како је $\measuredangle BAD=60°$ и $AB=AD$ то је ΔADB једнакостраничан и $\measuredangle ADB=60°$ **(3 бода)**. Аналогно је и $\measuredangle DBC=60°$ **(3 бода)**. Сада је $\Delta ADE \cong \Delta BDF$ ($AD=BD$, $AE=BF$, $\measuredangle DAB=\measuredangle DBC$) па је $DE=DF$ и $\measuredangle ADE=\measuredangle BDF$ **(7 бодова)**. Како је $DE=DF$ и $\measuredangle EDF=\measuredangle EDB+\measuredangle BDF=\measuredangle EDB+\measuredangle ADE=\measuredangle ADB=60°$, то је троугао DEF једнакостраничан **(7 бодова)**.



5. Да би збир 3 броја био паран сва три морају бити парна или један паран, а два непарна. У сваком случају један од ова 3 броја је паран **(6 бодова)**. Збир преостала 2 броја је непаран, а то је могуће само ако је 1 паран, а 1 непаран. Дакле, и од преостала 2 броја један је сигурно паран **(7 бодова)**. Како су сада 2 броја сигурно парна, а сваки паран број је дељив са 2, то је производ ових 5 бројева дељив са 4 **(7 бодова)**.