Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА 06.03.2010.

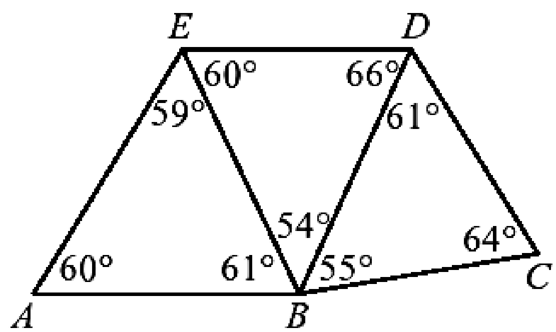
VI РАЗРЕД

1. Ако су a, b и c цели бројеви и ако је $a \cdot b = -6$, $a \cdot c = -10$ и $b \cdot c = 15$ израчунај $a \cdot b \cdot c$, a, b и c.

2. Над страницом AB квадрата $ABCD$ конструисан је једнакостранични троугао ABE при чему је тачка E у унутрашњости квадрата. Израчунај угао DEC.

3. Одреди $n \in \mathbb{N}$ тако да је $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n}$ природан број.

4. Седам дужи формирају три троугла као на слици. Која од тих седам дужи је најдужа?

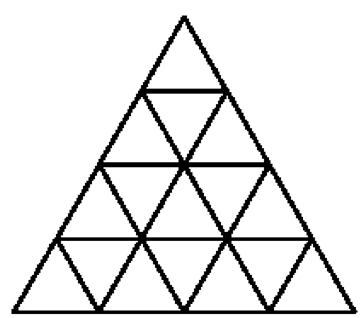


5. У једнакостраничном троуглу странице 4cm на случајан начин је распоређено 17 тачака. Докажи да постоје две тачке чије је растојање мање од 1cm.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VI РАЗЕД

1. **(ML XLII-2)** Како је a цео број који је делилац бројева –6 и –10 то је $a \in \{1, -1, 2, -2\}$. У случајевима када је $a = 1$ или $a = -1$, добијамо да је $b \cdot c = 60$, што је нетачно (**6 бодова**). У случају када је $a = 2$, имамо да је $b = -3$, $c = -5$ и $a \cdot b \cdot c = 30$ што је једно решење задатка (**7 бодова**). У случају када је $a = -2$, имамо да је $b = 3$, $c = 5$ и $a \cdot b \cdot c = -30$ што је друго решење задатка (**7 бодова**).
2. **(ML XLIV-3)** Угао EBC је једнак $90° - 60° = 30°$. Странице троугла и квадрата су једнаке па је на основу тога троугао EBC једнакокрак ($EB = BC$). Углови на основици EC су по $75°$. $\Delta EBC \cong \Delta EAD$, па је $\measuredangle DEA = 75°$ (**8 бодова**). Дакле,
$$\measuredangle DEC = 360° - 60° - 2 \cdot 75° = 150° \text{ (12 бодова).}$$
3. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n}=\frac{41}{42}+\frac{1}{n}$ (**5 бодова**) Како је $\frac{41}{42}<1$ и $\frac{1}{n}\leq 1$ то је $\frac{41}{42}+\frac{1}{n}<2$ па може бити само $\frac{41}{42}+\frac{1}{n}=1$ (**8 бодова**). Одавде је $n = 42$ (**7 бодова**).
4. Од дужи BC, CD и BD најдужа је BD јер је наспрам највећег угла троугла BCD (**5 бодова**). У троуглу EDB највећа је дуж EB јер је наспрам највећег угла, па је и $EB > DB$ (**5 бодова**). У троуглу ABE највећа је дуж AE јер је наспрам највећег угла, па је и $AE > EB$ (**5 бодова**), одакле закључујемо да је најдужа дуж AE (**5 бодова**).
5. Не може. Дати једнакостраничан троугао можемо поделити на 16 једнакостраничних троуглова странице 1cm. 16 тачака можемо распоредити у сваки од ових троуглова, док последњу тачку ма где ставили биће на у једном од 16 троуглова и на растојању мањем од 1cm од тачке из тог троугла (**20 бодова**).



Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.