Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

12.03.2022 - VI разред

1. Колико има петоцифрених бројева чије су све цифре различите и:
а) дељиви су са 10;
б) збир прве и последње цифре је 8?

2. Збир два броја и њиховог збира је $\frac{40}{21}$. Израчунај сабирке ако је апсолутна вредност једног четири пута већа од апсолутне вредности другог.

3. Дат је троугао ABC. Угао који граде симетрале спољашњих углова код темена B и C једнак је унутрашњем углу код темена A и за $7°$ је већи од унутрашњег угла код темена C. Упореди дужине страница троугла ABC.

4. Нека је n најмањи природан број дељив са 60, који се записује само помоћу цифара 0 и 7. Колико делилаца има број n?

5. У Петровом одељењу има n ученика. Сви ученици скупљају албуме са сличицама. Сваки ученик је сакупио бар један албум, а највише од свих, 8 албума, сакупио је Петар. Одреди најмању вредност броја n тако да сигурно можемо да тврдимо да постоји бар 5 ученика који су сакупили исти број албума.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

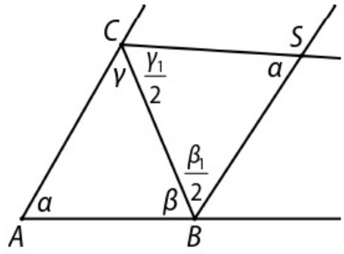
1. а) Цифра јединица мора да буде 0 [**2 бода**]. Од цифара 1, 2, ..., 9, цифра на месној вредности десетица хиљада може се одабрати на 9 начина. Цифра на месној вредности јединица хиљада на 8 начина, на месној вредности стотина на 7 начина и на месној вредности десетица на 6 начина [**4 бода**]. Дакле, укупно постоји $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ [**4 бода**] петоцифрених бројева дељивих са 10.
б) Прва и последња цифра броја се могу изабрати на 7 начина (1 и 7; 2 и 6; 3 и 5; 5 и 3; 6 и 2; 7 и 1; 8 и 0) [**4 бода**]. За избор цифара на месним вредностима јединица хиљада, стотина и десетица, када су прва и последња цифра већ изабране, постоји редом 8, 7 и 6 могућности (јер су све цифре различите), па тражених петоцифрених бројева има $7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2352$ [**6 бодова**].

2. (**МЛ 55/4**) Означимо сабирке са a и b. По услову задатка је $a + b + (a + b) = \frac{40}{21}$, одакле је $a + b = \frac{20}{21}$ [**4 бода**]. Како је $|a|=4|b|$, разликоваћемо два случаја.

Ако је $a = 4b$, онда је $b=\frac{4}{21}$ и $a=\frac{16}{21}$ [**8 бодова**].

Ако је $a = -4b$, онда је $b=-\frac{20}{63}$ и $a=\frac{80}{63}$ [**8 бодова**].

3. По услову задатка је $\measuredangle CSB = \alpha$, $\alpha = \gamma + 7°$, $\measuredangle SCB=\frac{\gamma_1}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\measuredangle SBC = \frac{\beta_1}{2}=\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{2\alpha-7°}{2}$. За унутрашње углове у троуглу BSC важи да је $\alpha+\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{2\alpha-7°}{2}=180°$, одакле је $5\alpha + \beta = 367°$ (*1) [**7 бодова**]. За унутрашње углове у троуглу ABC важи да је $\alpha + \beta + \alpha - 7° = 180°$, одакле је $2\alpha + \beta = 187°$ (*2) [**7 бодова**]. Одузимањем једнакости (*2) од једнакости (*1) добијамо да је $\alpha = 60°$, а онда и $\gamma = 53°$, $\beta = 67°$ [**4 бода**]. Како је $\beta > \alpha > \gamma$, онда је $b > a > c$ [**2 бода**].



4. Да би број био дељив са 60, потребно је да буде дељив и са 3 и са 4 и са 5 [**2 бода**]. Дакле, због дељивости са 5 последња цифра мора бити 0 [**2 бода**]. Да би број био дељив са 4, двоцифрени завршетак му мора бити дељив са 4. Како број 70 није дељив са 4, двоцифрени завршетак мора бити 00 [**4 бода**]. На крају, да би број био дељив са 3, збир цифара му мора бити дељив са 3. Најмањи могући збир цифара који је дељив са 3 је 21, па је најмањи тражени број 77700 [**6 бодова**]. Како је $77700 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 37$ [**2 бода**], то је број делилаца једнак $(2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 72$ [**4 бода**].

5. Преостала деца у Петровом одељењу могла су сакупити најмање 1, а највише 7 албума [**5 бодова**]. Ако је исти број албума сакупило по 4 ученика, тада би у одељењу било $7 \cdot 4 + 1 = 29$ ученика [**10 бодова**]. Сваки следећи ученик би био пети ученик у групи која је сакупила исти број албума, па је у одељењу најмање 30 ученика [**5 бодова**].