Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

12.03.2022 - VIII разред

1. Основа праве четворостране призме је ромб чија је страница дужине 12 cm и оштар угао 60°. Израчунај запремину призме ако је висина једнака половини дуже дијагонале ромба у основи.

2. Колико има шестоцифрених природних бројева дељивих са 5, који се записују само цифрама 1, 2, 3, 4, 5 и 6 (цифре се не понављају), при чему цифре 1 и 2 не могу бити једна до друге?

3. Основа тростране пирамиде $ABCS$ је једнакокрако-правоугли троугао ABC, са правим углом у темену B, а врх S се нормалном пројекцијом на раван основе пројектује у тачку D, која је средиште ивице AC. Ако је бочна страна ACS правоугли троугао са правим углом код темена S и $SD = \sqrt{2}$ cm, израчунај површину пирамиде $ABCS$.

4. У скупу целих бројева реши једначину $y^4 + x = xy + 8$.

5. Да ли је могуће бројеве $3, 3^2, \ldots, 3^{n-1}, 3^n$ поделити у три групе (не обавезно са истим бројем елемената) тако да је производ елемената сваке групе исти, уколико је:
а) $n = 2022$; б) $n = 2023$?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

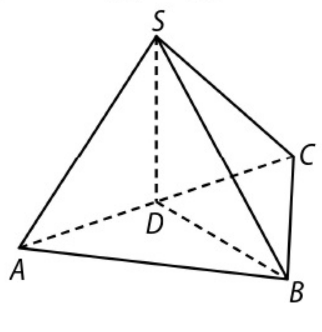
VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Површина основе једнака је збиру површина два једнакостранична троугла, па је $B = 72\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ [**8 бодова**]. Дужа дијагонала основе је $d_1 = 12\sqrt{3}$ cm [**8 бодова**], па је тражена запремина $V = B \cdot \frac{d_1}{2} = 1296$ cm^3 [**4 бода**].

2. Последња цифра свих тражених бројева мора да буде 5 [**2 бода**]. Цифре 1, 2, 3, 4 и 6 се на првих 5 позиција могу распоредити на $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ начина [**4 бода**]. Случај када су цифре 1 и 2 једна до друге своди се на случај када 4 цифре треба распоредити на 4 места, а таквих могућности има $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ [**5 бодова**], при чему се цифре 1 и 2 у свакој од тих могућносту могу распоредити на 2 начина [**4 бода**]. Тражени број петоцифрених бројева једнак је $120 - 2 \cdot 24 = 72$ [**5 бодова**].

3. Тачка S се налази на симетрали странице AC, па је $AS = SC$. Дакле, троугао ACS је једнакокрако-правоугли, па су троуглови ABC и ACS подударни [**5 бодова**] и површина сваког је $\frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 2$ cm^2. Троуглови SDC и SDB су једнакокрако-правоугли, па применом Питагорине теореме добијамо да је: $SC = SB = SA = BC = BA = 2$ cm [**5 бодова**]. Одавде закључујемо да су троуглови ABS и BCS једнакостранични и површина сваког је $\sqrt{3}$ cm^2 [**5 бодова**]. Површина пирамиде је $P = 2(P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ABS}) = 2(2+\sqrt{3})$ cm^2 [**5 бодова**].



4. Полазну једначину можемо записати у облику $x(y-1)=y^4-8$, а како је $y \neq 1$, добијамо $x=\frac{y^4-8}{y-1}=\frac{y^4-1}{y-1}-\frac{7}{y-1}=(y^2+1)(y+1)-\frac{7}{y-1}$ [**10 бодова**]. Из услова $x \in \mathbb{Z}$, важи $(y-1) \mid 7$, па $y-1 \in \{-7, -1, 1, 7\}$ [**6 бодова**]. Решења су $(x, y) \in \{(-184, -6), (8, 0), (8, 2), (584, 8)\}$ [**4 бода**].

5. (**МЛ 54/1**) Производ свих n бројева је $3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ [**4 бода**]. Ако бројеви могу да се поделе у три групе тако да је производ у свакој групи исти (на пример једнак је A), онда мора да буде $A^3=3^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Закључујемо да $3 \mid \frac{n(n+1)}{2}$ [**5 бодова**]. Како $\frac{2023 \cdot 2024}{2}$ није дељиво са 3, закључујемо да за $n = 2023$ није могуће поделити бројеве на тражени начин [**5 бодова**]. Покажимо да је то могуће за $n = 2022$. Да бисмо ово показали потребно је конструисати барем једну поделу датих бројева на три групе тако да је производ бројева у све три групе једнак, односно да је збир изложилаца у све три групе једнак. Бројеве 1, 2, 3, ..., 2021, 2022 можемо поделити у скупове од по шест узастопних бројева на следећи начин: {1, 2, 3, 4, 5, 6}, {7, 8, 9, 10, 11, 12}, ..., {2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022}. У сваком од ових скупова, збир првог и шестог; другог и петог, трећег и четвртог записаног броја је једнак. Дакле, ако из сваког скупа у по једну групу ставимо по један пар поменутих бројева, добићемо тражену поделу [**6 бодова**].