ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
20.02.2022.

VI разред

1. Петина оштрог угла α правоуглог троугла ABC једнака је трећини оштрог угла β тог троугла. Упореди дужине страница троугла ABC.

2. Одреди најмањи седмоцифрени број облика $\overline{17x679y}$ (x и y су цифре) који је дељив са 45.

3. Број 2022 написан је као производ пет различитих целих бројева. Одреди најмању вредност збира тих пет бројева.

4. Да ли постоје прости бројеви p и q такви да је
$$13p + 3q = 2022?$$
Ако постоје одреди сва решења. (Образложи одговор!)

5. У троуглу ABC угао BAC је 40°, угао ABC је 20° и разлика дужина страница $AB - BC$ је 10 cm. Ако симетрала угла ACB сече праву AB у тачки M, одреди дужину дужи CM.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

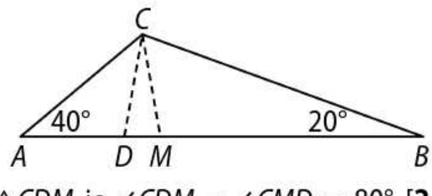
1. (**МЛ 55/2**) Како је $\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{3}$, то је $\alpha > \beta$ [**8 бодова**], па је и $a > b$ [**8 бодова**]. Дакле, $c > a > b$ [**4 бода**].

2. (**МЛ 55/2**) Број је дељив са 45 ако је дељив и са 5 и са 9 [**2 бода**]. Дакле, мора да је $y = 0$ или $y = 5$ [**3 бода**] и $9 \mid 1 + 7 + x + 6 + 7 + 9 + y$, тј. $9 \mid 30 + x + y$ [**5 бодова**]. Ако је $y = 0$, онда је $x = 6$ [**4 бода**], а ако је $y = 5$, онда је $x = 1$ [**4 бода**]. Од добијених бројева мањи је 1716795 [**2 бода**].

3. Како је $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ и бројеви 2, 3, 337 су прости [**1 бод**], закључујеш да ако се број 2022 запише као производ 5 различитих целих бројева, два од њих морају по апсолутној вредности да буду једнака 1, а остали су по апсолутној вредности једнаки 2, 3, 337 [**8 бодова**]. Како су у питању различити бројеви, два од њих морају да буду 1 и –1 [**4 бода**].Производ преостала три је –2022. Најмањи збир је у случају –2, –3, –337 [**4 бода**] и он је тада једнак –342 [**3 бода**].

4. Како $3 \mid 2022$, $3 \mid 3q$ и како су бројеви 3 и 13 узајамно прости, то $3 \mid p$ [**10 бодова**], па је $p = 3$ [**2 бода**]. Одавде је $q = 661$ [**2 бода**]. Проверавајући да ли је број 661 дељив са 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 и 23 закључујемо да је 661 прост број [**6 бодова**], па је једино решење задатка $p = 3$, $q = 661$.

Напомена. Уколико је само наведено решење без поступка бодовати са 3 бода.



5. Нека је D тачка странице AB таква да је $BD = BC$. Тада је $\triangle CDB$ једнакокраки, па је $\measuredangle BCD = \measuredangle CDB = 80°$ [**4 бода**]. Због $\measuredangle ACD = \measuredangle DAC = 40°$ биће $AD = CD$ [**4 бода**]. У $\triangle CDM$ је $\measuredangle CDM = \measuredangle CMD = 80°$ [**2 бода**], па је $CM = CD = AD = AB - BD = AB - BC = 10$ cm [**10 бодова**].