ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
20.02.2022.

VII разред

1. Дат је ромб чија је једна дијагонала 90 cm, а површина 5400 cm^2. Израчунај полупречник уписане кружнице ромба.

2. Дат је број $x=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{19}$. Поређај по величини бројеве $x, x^2, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}$.

3. Обим трапеза је 135 cm. Дужи крак трапеза је дуг 36 cm и заклапа са краћом основицом угао од 150°. Краћи крак трапеза једнак је краћој основици и његова дужина износи 60% дужине дуже основице. Одредити површину тог трапеза.

4. У продавницу је стигла кутија оловака и планирано је да се све продају по истој цени. Једна четвртина укупног броја оловака продата је по 5% вишој цени од планиране. Половина оловака продата је по 10% нижој цени од планиране. По колико процената вишој цени треба да се прода остатак робе да би била остварена зарада која је планирана када су оловке стигле?

5. Одреди све троцифрене природне бројеве $\overline{abc}$, такве да је $\sqrt{\overline{abc}+\sqrt{c}}$ такође природан број.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 55/5**) Нека је a страница ромба, а дијагонале $d_1 = 90$ cm и d_2. Из $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ добијамо $d_2 = 120$ cm [**4 бода**]. Из $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$ [**4 бода**] добијамо $a = 75$ cm [**2 бода**]. Висина ромба једнака је $h = \frac{P}{a} =$ 72 cm [**5 бодова**], а полупречник уписаног круга $r = \frac{h}{2} = 36$ cm [**5 бодова**].

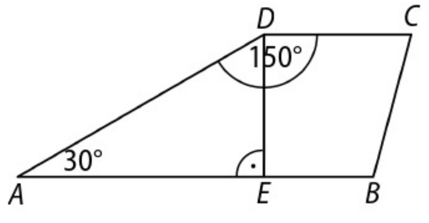
2. (**МЛ 55/2**) Важи да је

$$x = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{19} < \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10} = 1$$ [**10 бодова**].

Због $0 < x < 1$ важи $x^2 < x$ [**3 бода**] и $x < \frac{1}{x}$ [**3 бода**]. Како је $\frac{1}{x} > 1$, то је $\frac{1}{x} < \frac{1}{x^2}$ [**3 бода**]. Дакле, $x^2 < x < \frac{1}{x} < \frac{1}{x^2}$ [**1 бод**].

3. Нека је AD дужи крак, а AB дужа основица трапеза $ABCD$. Тада је $AD = 36$ cm и $BC = CD = 60\%AB$. Из $AB + 60\%AB + 60\%AB + 36 = 135$ [**4 бода**] добијамо да је $AB = 45$ cm [**4 бода**], док је $BC = CD = 27$ cm [**2 бода**]. Дуж DE је висина трапеза, па је $\measuredangle EDC = 90°$ и $\measuredangle ADE = 60°$ [**2 бода**]. Из правоуглог троугла AED налазимо да је $AD = 2DE$, па је $DE = 18$ cm [**4 бода**]. Тражена површина је

$$P = \frac{AB + CD}{2} \cdot DE = 648 \text{ cm}^2$$ [**4 бода**].



4. Означимо са x планирану зараду, а са y тражени проценат увећања. Тада је

$$105\% \cdot \frac{1}{4} \cdot x + 90\% \cdot \frac{1}{2} \cdot x + (100 + y)\% \cdot \frac{1}{4} \cdot x = x \quad [\textbf{10 бодова}];$$

$$\frac{105}{400}x + \frac{90}{200}x + \frac{100+y}{400}x = x;$$

$$x \cdot \left(\frac{105}{400} + \frac{90}{200} + \frac{100+y}{400}\right) = x;$$

$$\frac{105}{400} + \frac{90}{200} + \frac{100+y}{400} = 1;$$

$$385 + y = 400;$$

$$y = 15 \quad [\textbf{10 бодова}].$$

Дакле, остатак оловака треба продати по 15% вишој цени.

5. Ако је $\sqrt{\overline{abc} + \sqrt{c}} = n,\ n \in \mathbb{N},$ тада је $\sqrt{c} = n^2 - \overline{abc},$ па закључујемо да број c мора да буде потпун квадрат, тј. $c \in \{0,1,4,9\}$ [**8 бодова**].

Како је $n^2 = \overline{abc} + \sqrt{c}$ то c не може бити 1 или 9, јер би се тада квадрат броја завршавао цифром 2, што није могуће [**2 бода**].

Ако је c = 0, тада је $n^2 = \overline{ab0}$. Број $\overline{ab0}$ је дељив са 10, па како је потпун квадрат, дељив је и са 100. Због тога у обзир долазе само бројеви 100, 400 и 900 [**5 бодова**].

Ако је c = 4, добијамо $\overline{ab4} + 2 = n^2$. Види се да је n двоцифрени број мањи од 30 који се завршава цифром 4 или 6. Постоје четири могућности: $14^2 - 2 = 194$; $16^2 - 2 = 254$; $24^2 - 2 = 574$; $26^2 - 2 = 674$ [**5 бодова**].