ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 03.12.2021.

VIII РАЗРЕД

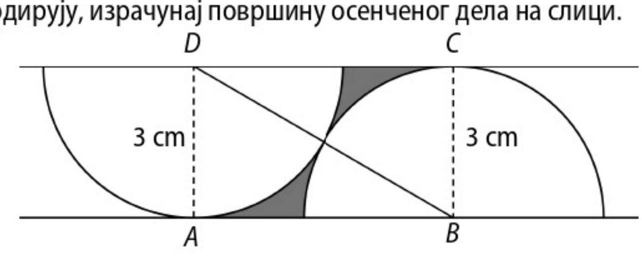
1. Летело јато гусака изнад низа од три језера. На прво језеро слетело је пола јата и још једна гуска. На друго језеро слетела је половина преосталог дела јата и још једна гуска. На треће језеро слетело је 5 гусака и после тога више није било гусака у лету. Колико је било гусака у јату на почетку?

2. Дата је кружница са центром O и полупречником 1 cm и на њој тачке A и B такве да је $\measuredangle AOB = 45°$. Тачка N је на полупречнику OB таква да је дуж AN нормална на дуж OB. Израчунај површину троугла AON.

3. Дат је квадрат $ABCD$ и на страници AD тачка E тако да је $CE = 8$ cm. Нека је тачка F подножје нормале из темена B на дуж CE. Ако је $BF = 4{,}5$ cm, израчунај дужину странице квадрата.

4. Одреди све природне бројеве n такве да када им се дода 53 добија се квадрат природног броја, а када им се одузме 42, такође се добија квадрат природног броја.

5. Тачке A, B, C, D су темена правоугаоника. Ако се кругови $k_1(D, DA)$ и $k_2(B, BC)$ додирују, израчунај површину осенченог дела на слици.

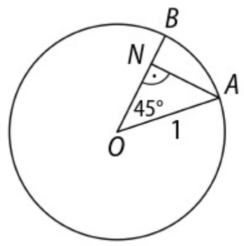


Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

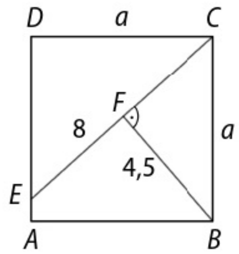
VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Након што је на друго језеро слетело половина гусака и још једна остало је 5 гусака. То значи да је половина од броја гусака које су дошле до другог језера једнака 6, а укупан број гусака које су дошле до другог језера је 12 [**10 бодова**]. На исти начин добијамо да је број гусака у јату на почетку $2 \cdot (12 + 1) = 26$ [**10 бодова**].



2. (**МЛ 55/5**) Из правоуглог троугла AON добијамо да је $AN = ON = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ cm [**10 бодова**], па је површина $P = \dfrac{AN \cdot ON}{2} = \dfrac{1}{4}$ cm^2 [**10 бодова**].



3. (**МЛ 56/1**) Троуглови CED и BCF су слични јер су им сви одговарајући углови једнаки [**10 бодова**]. Из сличности ових троуглова следи $a : 8 = 4{,}5 : a$, одакле је $a = 6$ cm [**10 бодова**].

4. (**МЛ 55/5**) Нека је $n + 53 = x^2$ и $n - 42 = y^2$ ($x, y \in N$). Одузимањем левих и десних страна свих једнакости добијамо $95 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ [**4 бода**]. Како је $95 = 1 \cdot 95 = 5 \cdot 19$, то постоје две могућности: $x - y = 1$, $x + y = 95$ [**3 бода**] или $x - y = 5$, $x + y = 19$ [**3 бода**]. У првом случају је $x = 48$, $y = 47$, $n = 2251$ [**5 бодова**], а у другом $x = 12$, $y = 7$, $n = 91$ [**5 бодова**].

5. Тражена површина једнака је разлици површине правоугаоника $ABCD$ и полукруга полупречника 3 cm. Како је $AB = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ cm [**5 бодова**], површина правоугаоника је $9\sqrt{3}$ cm^2 [**5 бодова**]. Површина полукруга је $\dfrac{9}{2}\pi$ cm^2 [**5 бодова**]. Површина осенченог дела је $9 \cdot \left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}\right)$cm^2 [**5 бодова**].