

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
28.03.2015.

VI разред

1. Израчунај вредност израза $-a - \frac{1}{b - \frac{1}{c}}$ ако је $a = 0,333\dots = 0,\bar{3}$;
 $b = 0,444\dots = 0,\bar{4}$; $c = 0,666\dots = 0,\bar{6}$.
2. Производ три узастопна цела броја је једнак осмострукој вредности њиховог збира. Одреди те бројеве.
3. Конструиси троугао ABC ако је $a = 6\text{cm}$, $\alpha = 60^\circ$, $h_c = 4\text{cm}$.
4. У равни је дато 10 правих. При томе међу било које четири од датих правих постоје две паралелне. Докажи да међу 10 датих правих постоје четири паралелне.
5. У троуглу ABC је $\sphericalangle A = 120^\circ$, $\sphericalangle B = 20^\circ$, а симетрала угла A (до пресека са наспрамном страницом) је дужине 2cm. Одреди разлику дужина страница BC и AB .

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

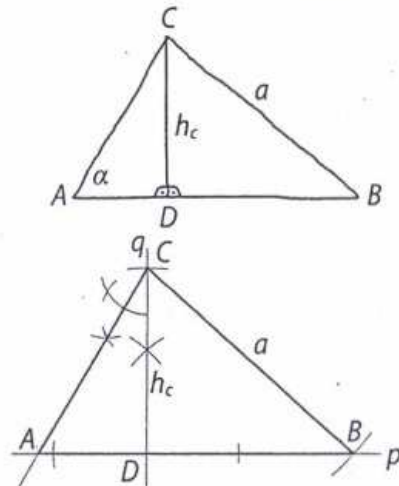
Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (МЛ 47/3) $a = \frac{1}{3}$ (3 поена), $b = \frac{4}{9}$ (3 поена) и $c = \frac{2}{3}$ (3 поена). Сада имамо:

$$-a - \frac{1}{b - \frac{1}{c}} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{\frac{4}{9} - \frac{1}{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{19}{18}} = -\frac{1}{3} + \frac{18}{19} = \frac{35}{57} \quad (11 \text{ поена}).$$

2. Нека су то бројеви $n - 1, n, n + 1$ ($n \in \mathbb{Z}$). Тада важи $(n - 1)n(n + 1) = 8 \cdot 3n = 24n$ (5 поена). Једно очигледно решење ове једначине је $n = 0$. Остала решења задовољавају услов $(n - 1)(n + 1) = 24 = 4 \cdot 6 = -6 \cdot (-4)$, одакле следи $n = 5$ или $n = -5$. Тражени бројеви су: $\{-6, -5, -4\}, \{-1, 0, 1\}, \{4, 5, 6\}$ (свако решење по 5 поена).

3. Нека је D подножје нормале из темена C (слика горе). Троугао ADC је правоугли, позната је катета и унутрашњи углови, па га можемо конструисати (4 поена). Троугао BDC је такође правоугли, познати су нам катета и хипотенуза, па и њега можемо конструисати (4 поена). Конструкција (слика доле) (није битан редослед конструкција троуглова ADC и BDC): на правој p одаберемо произвољну тачку D и у њој конструишемо нормалу q на праву p ; на праву q нанесемо дужину h_c и добијамо тачку C ; из темена C конструишемо угао од 30° ; у пресеку крака угла и праве p добијамо тачку A ; из темена C опишемо кружницу полупречника a ; у пресеку кружнице и праве p добијамо теме B , при чему је $A-D-B$ (12 поена).



4. Посматрајмо подскупове међусобно паралелних правих у скупу датих правих. Број таквих подскупова је највише 3, јер ако би постојала бар 4, онда би у скупу датих правих постојале 4 праве међу којима нема паралелних, супротно претпоставци задатка (10 поена). Како је број подскупова највише 3, неком од њих морају припадати бар 4 праве (Дирихлеов принцип) (10 поена).

5. Нека је D тачка странице BC таква да је $BD = AB$. Троугао ABD је једнакокрак са угловима $20^\circ, 80^\circ, 80^\circ$ (6 поена). Углови троугла ADC су $40^\circ, 40^\circ, 100^\circ$, он је једнакокрак и $CD = AD$ (6 поена). Углови троугла AMD су $80^\circ, 80^\circ, 20^\circ$, па је једнакокрак и $AD = AM$ (6 поена). Зато је $CD = AD = AM = 2\text{cm}$, па је тражена разлика $BC - AB = BC - BD = CD = 2\text{cm}$ (2 поена).

